

UNIVERSIDADE TIRADENTES

ALYNE CRISTINE TAVARES DOS SANTOS

A RELAÇÃO DA MATEMÁTICA NA MÚSICA:
HARMONICA DOS NÚMEROS

Propriá
2009

ALYNE CRISTINE TAVARES DOS SANTOS

A RELAÇÃO DA MATEMÁTICA NA MÚSICA:
HARMONICA DOS NÚMEROS

Monografia apresentada á
Universidade Tiradentes como um dos
pré-requisitos para a obtenção do grau
de Licenciatura em Matemática.

ORIENTADOR:
Prof. José Antônio de Jesus

Propriá
2009

ALYNE CRISTINE TAVARES DOS SANTOS

A RELAÇÃO DA MATEMÁTICA NA MÚSICA:
HARMONICA DOS NÚMEROS

Monografia apresentada ao Curso de
Matemática da Universidade Tiradentes -
UNIT, como um requisito para a obtenção
do grau de Licenciatura em Matemática.

.

Aprovado em ____/____/____.
Banca Examinadora

Profº . Prof. José Antônio de Jesus
UNIT

A minha família, especialmente aos nossos pais que me trazem tanta substância ao binômio paixão-razão da minha vida.

AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho só foi possível graças:

A DEUS, que me deu vida e inteligência, e que me dá força para continuar a caminhada em busca dos meus objetivos.

Ao Professor Antônio José de Jesus pela dedicação na realização deste trabalho, que sem sua importante ajuda não teria sido concretizado.

Aos meus pais, Antônio Tavares dos Santos e Zenaide Tavares dos Santos que me ensinaram a não temer desafios e a superar os obstáculos com humildade.

Ao Professor Danilo pelo incentivo e sugestões dadas para a realização da monografia.

A minha amiga Maria Correia Nunes pelo incentivo e apoio durante a realização do trabalho.

E aos demais, que de alguma forma contribuíram na elaboração desta monografia.

Não há ramo da matemática, por abstrata que seja que não possa um dia vir a ser aplicada ao fenômeno do mundo real.

Lobachevsky

RESUMO

Este trabalho apresenta uma descrição da relação existente entre a matemática e a música, apontando fatos significativos relacionados a história da música e a participação direta da matemática em sua construção, a música está muito ligada aos sentidos, porém ela também está intrinsecamente ligada à matemática. Observamos de início, uma “propriedade” comum a essas duas ciências: cada uma delas precisa se apropriar de símbolos, de modo que possam ser expressas, como se fosse uma “língua” própria: a matemática, com seus símbolos e números, que traduzem as idéias pensadas, em qualquer que seja o idioma; da mesma maneira, a música, com suas figuras e notações. Cada uma das figuras musicais possui um número correspondente, onde se evidencia a relação de proporcional entre elas. Também são encontradas proporções em cada comprimento tomado na corda de um monocórdio, que corresponde a um som diferente. Uma vez conhecidas as relações de proporção no comprimento da corda, e num monocórdio, para formar a escala musical básica, assim como as relações de proporção entre as figuras musicais, com exercício de leitura rítmica, fica clara a presença da matemática na música – percepções que podem ser matematizadas. Essas duas relações propostas são simples, em termos práticos, em sua concepção, mostrando como o som é produzido, tal como suas propriedades, seus elementos de notação e percepção musical.

PALAVRAS – CHAVE: Pitágoras; Monocórdio e Figuras Musicais.

SUMÁRIO

1- INTRODUÇÃO.....	09
2- HISTÓRICO DA RELAÇÃO MATEMÁTICA E MÚSICA.....	10
2.1 - A ORIGEM DAS NOTAS MUSICAIS.....	11
2.2 - A VARIAÇÃO SIMBÓLICA DAS CLAVES MUSICAIS AO LONGO DO TEMPO.....	12
3 – PITÁGORAS E SUA INFLUÊNCIA.....	14
3.1 – ESCALA PITAGÓRICA	16
3.2 – EXPERIMENTO DO MONOCÓRDIO.....	17
3.3 - ARITMÚSICA PITAGÓRICA.....	18
4 - ELEMENTOS DA MÚSICA EM RELAÇÕES MATEMÁTICAS.....	21
4.1 – ESCALAS MUSICAIS E HARMÔNICAS.....	21
5 – TEMPERAMENTOS.....	26
5.1 – ESCALA TEMPERADA.....	28
5.2 - EVOLUÇÃO HISTÓRICA DAS AFINAÇÕES E TEMPERAMENTOS.....	20
CONCLUSÃO.....	31
REFERÊNCIAS.....	34

1 - INTRODUÇÃO

Na definição mais simples, Música, ritmo e som, ou seja, é uma combinação de sons executados em compasso. A importância da Matemática na música se revela desde a concepção mais fundamental do que é 'som musical' e do que é 'ritmo'. Os sons com os quais podemos criar nossas músicas constituem a escala musical, Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si, as sete notas musicais "naturais". A determinação dessas notas tem uma história muito longa, e uma enorme influência da Matemática. Que obedecem a um tipo de divisão fracionária e são definidos a partir de regras com fundamentos matemáticos muito precisos e quando combinadas podem produzir resultados agradáveis aos nossos ouvidos. Observamos de início uma propriedade comum a essas duas ciências, onde cada uma precisa se apropriar de símbolos de modo que possam ser expressas como se fosse uma língua própria, a matemática com seus símbolos e números que traduzem as idéias pensadas em qualquer que seja o idioma, da mesma forma a música com suas figuras e notações e as figuras que possui um número de correspondente onde se evidencia a relação de proporcionalidade entre si.

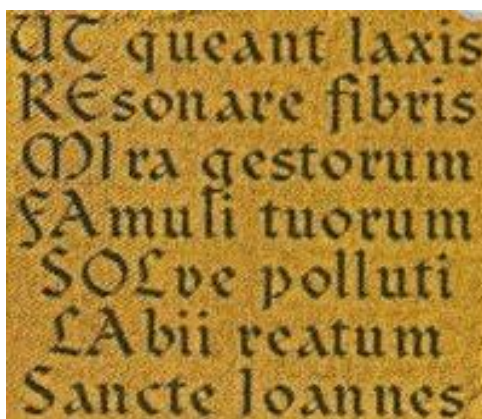
A música é frequentemente definida como a linguagem universal. Uma linguagem incrivelmente direta que transpõe língua e lógica, que fala diretamente com a alma. A matemática por sua vez é a ciência do raciocínio lógico e abstrato. Ela envolve uma permanente procura da verdade. É rigorosa e precisa. Observando apenas os significados podemos ter a falsa sensação de dois mundos desconexos. Hoje sabemos que a propagação do som obedece a equações matemáticas e existem relações diretas entre escalas, tons, semitons e os conhecimentos e conceitos matemáticos de razão, proporção, sequência, logaritmo entre outros.

2 - HISTÓRICO DA RELAÇÃO MATEMÁTICA E MÚSICA

A relação existente entre a matemática e a música apontando fatos significativos relacionados a história da música e a participação direta da matemática em sua construção. Em quase todos os povos da Antiguidade encontram-se manifestações destes dois campos em separado. O poder conquistador da música já se expressa na mitologia grega em Orfeu, cujo canto acompanhado de lira sustava os rios, amansava feras e movia pedras. A matemática também se faz presente desde os tempos mais remotos, por exemplo, na contagem das coisas. A interação entre essas áreas torna-se fortemente manifesta a partir da necessidade de equacionar e solucionar problemas da consonância, no sentido de buscar fundamentos científicos capazes de justificar tal conceito. Com relação à organização de escalas musicais, esta ocorreu de diversas maneiras em diferentes povos e épocas, porém com alguns aspectos em comum. Os gregos desenvolveram os tetracordes e depois escalas com sete tons. Teóricos musicais como Pitágoras, Arquitas, Aristoxeno, Erastóstenes se dedicaram à construção de escalas desenvolvendo diferentes critérios de afinidade. Por exemplo, valorizando os intervalos de quinta perfeitas, bem como a utilização somente de números de 1 a 4 na obtenção das frações da corda para gerar as notas da escala, Pitágoras estabeleceu uma afinação utilizando percursos de quinta para a obtenção das notas da escala. Arquitas constrói sua escala baseada em frações da corda resultantes de médias harmônicas e aritméticas daquelas encontradas por Pitágoras no experimento do monocórdio. Já Erastóstenes elaborou a diferenciação entre intervalos calculados aritmeticamente a maneira de Aristoxeno, de intervalos calculados pela razão.

2.1 - ORIGEM DAS NOTAS MUSICAIS

Segundo a lenda, a origem dos nomes das notas musicais DO, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, está na música coral medieval. O monge italiano Guido D'Arezzo (aprox. 990-1050) criou o sistema para nomear as notas, onde as seis primeiras notas vieram das sílabas iniciais das seis primeiras frases do hino de louvou a São João Batista, padroeiro dos cantores medievais. Escrito por Paolo Diácono (720-799), cada frase tinha uma escala acima da anterior, exatamente como as notas fundamentais. A letra dizia:



Traduzindo: “Para que os teus servos possam cantar as maravilhas dos teus atos admiráveis, absolve as faltas dos nossos lábios impuros, São João”. Com o tempo, o “UT”, substituiu a primeira nota musical, que seria "UT", por "DO" (inicial do seu sobrenome). Assim, as sílabas DÓ, RÉ, MI, FÁ, SOL, LÁ e SI passou a ser referência para qualquer composição musical no mundo inteiro, e assim tornando mais fácil o aprendizado e o estudo da música.

2.2 - A VARIAÇÃO NA SIMBOLOGIA DAS CLAVES MUSICAIS AO LONGO DO TEMPO

Os símbolos empregados na pauta musical para abarcar toda a tessitura dos instrumentos musicais têm variado ao longo do tempo sendo atualmente empregados os símbolos.



Clave de Sol,

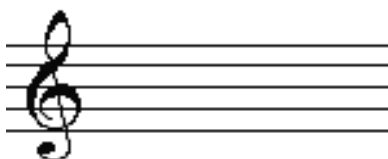


Clave de dó



Clave de Fá

Clave de Sol



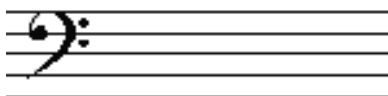
Na clave de Sol, vemos claramente aqui uma espiral

Clave de Dó



A clave de Dó nos traços do lado direito sugere também duas espirais em

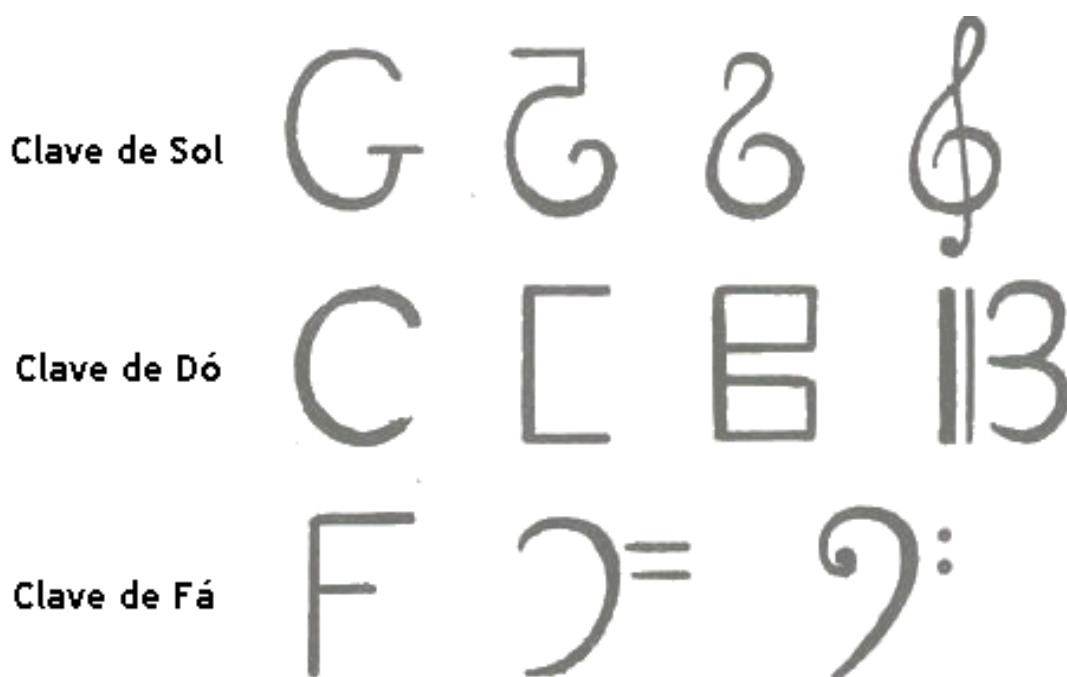
Clave de Fá



A clave de Fá é a expressão mais forte da espiral

É curioso verificar que houve uma modificação paulatina ao longo do tempo introduzida pelos copistas de partituras, até que chegassem a essa representação nos dias de hoje, talvez na tentativa de simplificar os traços e conferir maior rapidez no desenhar. É intrigante verificar que todas elas trazem algo em comum dentro de seus traços: Algo que nos remete a forma espiral.

A variação de forma na linha de tempo deu-se assim:



Tudo isto começou com Guido Dareso, no século XIV, que desenhou um tetragrama e inicialmente com as claves de Dó e Fá para representar os sons. Com o tempo apareceram instrumentos com uma extensão de sons maior daqueles existentes e então apareceu a clave de Sol. Como sabemos a Clave de Do assinalada nas linhas 1, 2, 3, e 4 e a clave de fá na terceira e quarta linha.

3 - PITÁGORAS E SUA INFLUÊNCIA PARA A MATEMÁTICA E A MÚSICA

Pitágoras estabeleceu uma relação matemática entre os diversos sons, a descoberta do intervalo de uma oitava como sendo referente a uma relação de frequência de 2:1, uma quinta em 3:2, uma quarta em 4:3, e um tom em 9:8. Os seguidores de Pitágoras aplicaram estas razões ao comprimento de fios de corda em um instrumento chamado cânnon, ou monocórdia, e, portanto, foram capazes de determinar matematicamente a entonação de todo um sistema musical. Os pitagóricos viam estas razões como governando todo o Cosmos assim como o som, e Platão descreve em sua obra, Timeu, a alma do mundo como estando estruturada de acordo com estas mesmas razões. Para os pitagóricos, assim como para Platão, a música se tornou uma natural extensão da matemática, bem como uma arte. A matemática e as descobertas musicais de Pitágoras foram desta forma, uma crucial influência no desenvolvimento da música através da idade média na Europa.

A descoberta desta relação entre razão de números inteiros e tons musicais mostrou-se significativa naquela ocasião, assim a partir deste experimento, Pitágoras estabeleceu relações entre a matemática e a música associando respectivamente, aos intervalos musicais referentes às consonâncias perfeitas. Essas correspondem às frações de uma corda que fornecem as notas mais agudas dos intervalos referidos, quando se produz a nota mais grave pela corda inteira. Este descobrimento de intervalos consonantes deve-se a Pitágoras, embora provavelmente estes já fossem conhecidos desde muito antes em distintas culturas antigas. O pensador de Samos justificou a subjacência de pequenos números inteiros as consonâncias pelo fato de que os

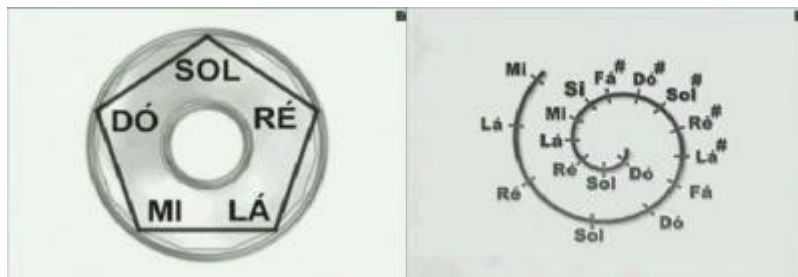
números 1, 2, 3 e 4 geravam toda a perfeição. Os pitagóricos consideravam o número quatro como a origem de todo o universo, todo o mundo material, representando a matéria em seus quatro elementos: o fogo, o ar, a terra e a água. A importância deste número para os pitagóricos emerge ainda no cenário musical ao considerar o tetracorde – o sistema de quatro sons, cujos extremos encontravam-se a um intervalo de quarta justa.

Influenciada pela cultura oriental, a doutrina pitagórica sustentava que “Tudo é número e harmonia”. Assim os pitagóricos acreditavam que todo o conhecimento reduzir-se-ia a relações numéricas, posicionando-as como fundamento da ciência natural. Os intervalos apresentam-se consoantes, isto é entoavam naturalmente, tornava-se interessante estabelecer afinações que contivessem tais intervalos denominados puros. Partindo do pressuposto de que a oitava mostrava-se como intervalo fundamental, os pitagóricos a tomam como universo da escala, o problema do estabelecimento de uma escala reduzia-se a dividir a oitava em sons que determinassem o alfabeto através do qual a linguagem musical pudesse se expressar, tornando-se, portanto natural a partir de uma nota - determinante da oitava universal juntamente com sua oitava superior - caminhar em intervalos de quintas ascendentes e descendentes, retornando à nota equivalente – acrescida ou diminuída de um número inteiro de oitavas - sempre que escapasse da oitava - universo.

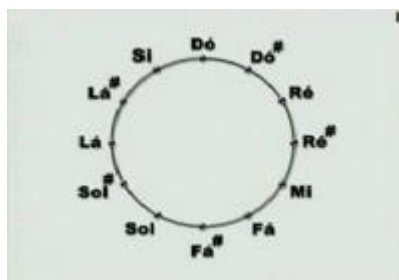
As distintas oitavas reduziam-se apenas a uma, possuindo, portanto cada nota equivalente em todas as outras oitavas, e particularmente naquela referencial, quando se atinge uma nota qualquer na construção de escalas, seu significado é a sua posição relativa à nota mais grave da oitava em que se encontra.

3.1 - ESCALA PITAGÓRICA.

Observe que a escala pitagórica forma uma espiral e assim diferentes oitavas tem diferentes afinações.



A criação das escalas pitagóricas não foi suficiente, e com o passar do tempo e com o desenvolvimento da música utilizando-se modulação e transposição, tornou-se necessária a adequação da escala musical. Embora várias idéias tenham sido apresentadas, a escala musical que solucionou de forma mais satisfatória todos os problemas das anteriores foi a escala igualmente temperada ou, simplesmente, escala temperada. A seguir a representação da escala temperada. Observe que ela forma um círculo e, portanto diferentes oitavas têm o mesmo tipo de afinação.



Essa escala possui como característica fundamental o fato da relação matemática entre as

freqüências de notas de um mesmo intervalo ser sempre igual, ou seja, a proporção entre as freqüências de duas notas distantes uma da outra de um semitom é sempre a mesma, não importando quais duas notas sejam (ex: C e C# ou G e G#).

Com relação à organização de escalas musicais, esta ocorreu de diversas maneiras em diferentes povos e épocas, porém com alguns aspectos em comum. Os gregos desenvolveram os tetracordes e depois escalas com sete tons. Teóricos musicais como Pitágoras, Arquitas, Aristoxeno, Erastóstenes se dedicaram à construção de escalas desenvolvendo diferentes critérios de afinidade. Por exemplo, valorizando os intervalos de quinta perfeitas, bem como a utilização somente de números de 1 a 4 na obtenção das frações da corda para gerar as notas da escala, Pitágoras estabeleceu uma afinação utilizando percursos de quinta para a obtenção das notas da escala. Arquitas constrói sua escala baseada em frações da corda resultantes de medias harmônicas e aritméticas daquelas encontradas por Pitágoras no experimento do monocórdio. Já Erastóstenes elaborou a diferenciação entre intervalos calculados aritmeticamente a maneira de Aristoxeno, de intervalos calculados pela razão.

3.2 - O EXPERIMENTO DO MONOCÓRDIO

Os primeiros sinais de casamento entre a matemática e a música surgem no século VI a.C. quando Pitágoras através de experiências com sons do monocórdio efetua uma de suas mais belas descobertas, que dá à luz, na época, ao quarto ramo da matemática: a música. Os principais teóricos musicais da escola Pitagórica foram Pitágoras e Filolau no período pré-clássico, bem como Arquitas, Aristoxeno e Aristóteles no período clássico. Possivelmente inventado por

Pitágoras, o monocórdio é um instrumento composto por uma única corda estendida entre dois cavaletes fixos sobre uma prancha ou mesa possuindo, ainda, um cavalete móvel colocado sob a corda estendida e a altura musical do som emitido quando tocada. Pitágoras buscava relações de comprimentos – razões de números inteiros – que produzissem determinados intervalos sonoros. Deu continuidade a seus experimentos investigando a relação entre o comprimento de uma corda vibrante e o tom musical produzido por ela. Este experimento de Pitágoras é a primeira experiência registrada na história da ciência, no sentido de isolar algum dispositivo para observar fenômenos de forma artificial.

Pitágoras observou que pressionando um ponto situado a $\frac{3}{4}$ do comprimento da corda em relação a sua extremidade – o que equivale a reduzi-la a $\frac{3}{4}$ de seu tamanho original – e tocando-a a seguir, ouvia-se uma quarta acima do tom emitido pela corda inteira. Exercida a pressão a $\frac{2}{3}$ do tamanho original da corda, ouvia-se uma quinta acima e a $\frac{1}{2}$ obtinha-se a oitava do som original. A partir desta experiência, os intervalos passam a denominar-se consonâncias pitagóricas. Assim, se o comprimento original da corda for 12 e se a reduzirmos para 9, ouviremos a quarta, para 8, a quinta, para 6, a oitava.

3.3 - ARITMÚSICA PITAGÓRICA

“Um certo Pitágoras, numa das suas viagens, passou por acaso numa oficina onde se batia numa bigorna com cinco martelos. Espantado pela agradável harmonia, que eles produziam, o nosso filósofo aproximou-se e, pensando inicialmente que a qualidade do som e da harmonia

estava nas diferentes mãos, trocou os martelos. Assim feito, cada martelo conservava o som que lhe era próprio. Após ter retirado um que era dissonante, pesou os outros e, coisa admirável, pela graça de Deus, o primeiro pesava doze, o segundo nove, o terceiro oito, o quarto seis de não sei que unidade de peso.” Assim descreve Guido d’Arezzo (992 -1050?), no seu pequeno mas influente tratado de música *Micrologus*, a lenda que atribui a Pitágoras (séc. VI AC) a descoberta fundamental da dependência dos intervalos musicais dos quocientes dos primeiros números inteiros, i.e., parafraseando o romano Boécio (séc. VI), “a grande, espantosa e muito subtil relação que existe entre a música e as proporções dos números”.

Em termos dos comprimentos de uma corda esticada, em particular do monocórdio, aquelas proporções simples traduzem-se no uníssono, dado pela razão 1:1, na oitava (diapason) por 1:2, na quinta (diapente) por 2:3 e na quarta (diatessaron) por 3:4. Estas razões podem ser obtidas a partir daqueles quatro números inteiros, correspondendo, respectivamente, a uma corda de comprimento igual a 12 unidades (uníssono), reduzida a metade 6 (oitava), a 8 unidades (quinta) ou a 9 (quarta). Para a Escola de Pitágoras, a harmonia dos sons estava em correspondência direta com a aritmética das proporções: o produto de $2/3$ (fração associada à quinta) por $3/4$ (fração associada à quarta) dá a fração $1/2$ associada à oitava; a sua divisão (subtração de intervalos) está associada à fração $8/9 = (2/3):(3/4)$ que representa um tom, i.e., a diferença de uma quinta e de uma quarta. Analogamente, se obtém que uma oitava é composta por duas quartas e um tom ($1/2 = 3/4 \times 3/4 \times 8/9$). Um dos textos gregos mais antigos que apresenta uma explicação sistemática das primeiras escalas musicais chegou até nós com o título *Sectio Canonis*, ou a “Divisão dum monocórdio”, e foi escrito cerca de 300 AC, sendo atribuído, não sem controvérsia, a Euclides. Com uma breve introdução sobre as causas dos sons e suas alturas, enquanto quantidades relativas, e com vinte proposições argumentadas à maneira de

teoremas, esse pequeno tratado euclidiano de música expõe o tratamento dos intervalos como razões entre números inteiros e culmina com a divisão do Kanón, que lhe dá o nome.

4 - ELEMENTOS DA MÚSICA EM RELAÇÕES MATEMÁTICAS

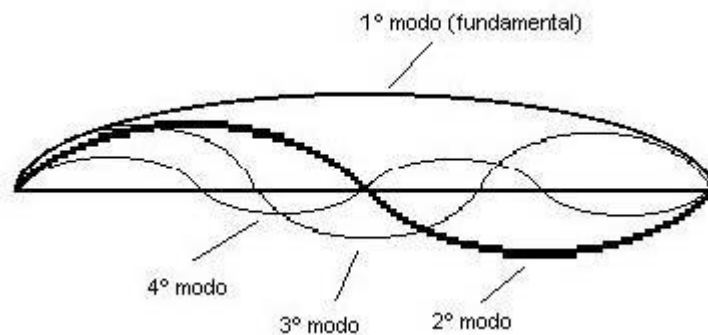
O sábio grego Pitágoras (séc. VI a.C.) foi quem primeiro estabeleceu uma escala de sons adequados ao uso musical, formando uma série a partir da fração de $\frac{2}{3}$ (que corresponde ao intervalo musical chamado de "quinta"). Usando uma sucessão de "quintas", ele conseguiu definir doze notas musicais, sendo sete "naturais" (Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si) e mais cinco "acidentes": Dó#, Ré#, Fá#, Sol#, e Lá# (o símbolo # é chamado de "sustenido").

A escala com intervalos acusticamente perfeitos definida por Pitágoras foi usada durante séculos, até pouco depois da Idade Média, quando a Música ainda era restrita a regras rígidas de composição e execução. Com o Renascimento, uma série de novas idéias surgiu nas Artes em geral, e na Música em particular, e os compositores começaram a tentar ultrapassar os limites musicais impostos até aquela época. Foi quando surgiu, então, a necessidade de se transpor as melodias para outras tonalidades. Com a escala musical em vigor isso era impraticável, pois os intervalos "perfeitos" só podiam ser usados numa única tonalidade. Em outras palavras, uma melodia feita para a tonalidade de Dó não podia ser executada na tonalidade de Fá, por exemplo, pois os intervalos entre as notas passariam a soar desafinados.

4.1 - ESCALAS MUSICAIS E HARMÔNICAS

Os sons utilizados para produção de música (excetuando-se os sons de alguns instrumentos de percussão) possuem determinadas características físicas, no que se refere às suas oscilações. Todos conhecem as sete notas musicais "naturais", que são Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e

Si. A determinação dessas notas tem uma história muito longa, e uma enorme influência da Matemática. Uma corda esticada, como num violão, pode vibrar livremente com determinado valor de oscilações por segundo. Se a nota musical que a corda produz ao vibrar livremente for um Dó, quando reduzimos seu comprimento à metade (mantendo sobre ela a mesma tensão), ela passará a vibrar com o dobro das oscilações, o que corresponderá à nota Dó seguinte (em termos musicais: esta nota estará uma "oitava" acima da original). Se reduzirmos o comprimento para $2/3$ do original, teremos então a nota Sol. E se reduzirmos o comprimento para $3/4$ do original, teremos a nota Fá. Como podemos perceber, usando determinadas frações do tamanho original de uma corda, podemos obter as notas naturais da escala musical. A razão para que determinadas frações ($1/2$, $2/3$, $3/4$, $4/5$, etc.) do tamanho original da corda soem melhor do que outras têm a ver com outra característica importante das oscilações, que é a presença de "harmônicos". Os harmônicos presentes em um som são componentes extremamente importantes no processo musical, tanto na formação das escalas musicais, como na harmonia musical. Por causa dessas características naturais, sons com diferentes alturas, quando postos a ocorrer ao mesmo tempo, podem criar auditivas esteticamente diferentes. Quando uma corda ou outro corpo vibra repetidamente, na verdade ele possui vários "modos" de vibração, isto é, além de vibrar na oscilação "fundamental", ele também vibra com oscilações múltiplas inteiras da fundamental: $2x$, $3x$, $4x$, etc. (veja figura).



Assim, uma corda ao vibrar oscila n ciclos por segundo em seu modo fundamental, mas também oscila $2n$ ciclos por segundo no modo de segundo harmônico, $3n$ ciclos por segundo no modo de terceiro harmônico, e assim por diante. Dependendo do corpo vibrante (corda de violão, palheta de sax, etc.), e também de como ele é posto a vibrar, esses modos harmônicos podem ser mais influentes ou não no som resultante. Se observarmos bem, veremos que as oscilações dos modos harmônicos ($2x$, $3x$, $4x$, etc.) do comprimento original da corda têm pontos coincidentes com as oscilações dos modos fundamentais daqueles comprimentos fracionários ($1/2$, $2/3$, $3/4$, etc.). Por causa dessas coincidências, os sons que mantêm entre si determinadas relações de frações ($2/1$, $3/2$, $4/3$, etc.) produzem sensações mais fortes no ouvido (pois excitam as mesmas regiões nervosas da cóclea), e por isso soam melhor juntos do que sons que tenham relações matemáticas, digamos, menos "perfeitas". Essa é a base de toda a escala musical ocidental.

Conforme observou Mário de Andrade, o homem possui o ritmo por si mesmo, pois a pulsação do coração, o ato de respirar e os passos já são elementos rítmicos (a maioria das crianças, por exemplo, já têm percepção instintiva da periodicidade de ritmo). Isso certamente influenciou o encadeamento das notas musicais em cadências de tempo, da mesma forma que as sílabas numa poesia. Sendo a contagem do tempo por si só uma concepção essencialmente matemática, não é difícil imaginar o quanto o ritmo está intimamente associado à Matemática. Na Música, entretanto, o ritmo não se limita apenas à contagem de tempo, ou a uma batida constante de pulsos de igual intensidade. Na verdade, os ritmos musicais possuem batidas com intensidades diferentes (acentuações), que se repetem dentro de algum padrão, e é isso que permite classificar as diversas variedades de ritmos existentes na música. Os exemplos abaixo mostram alguns dos tipos de "medidas" de marcação do tempo de uma música (os tempos "fortes" estão em negrito),

que são chamados de "compassos":

Compasso binário: 1 2 1 2 1 2 1 2

Compasso ternário: 1 2 3 1 2 3 1 2 3

Compasso quaternário: 1 2 3 4 1 2 3 4 1 2 3 4

No que se refere ao ritmo, a Música é organizada em "pedaços" contendo o mesmo número de tempos do compasso de referência. Por exemplo, numa música que utilize compasso quaternário, os pedaços (que também são chamados de "compassos") contêm sempre 4 tempos. Para que se possa escrever a melodia de uma música dentro dessas medidas, foram então definidas as "figuras de tempo", que mantêm relações fracionárias entre si. São elas:



Com essas figuras, podemos então posicionar e dar a duração que quisermos para as notas musicais dentro dos tempos do ritmo. E é exatamente como as notas são posicionadas dentro da música que podemos criar gêneros musicais com características distintas de ritmos.

5 – TEMPERAMENTO

O Temperamento no sentido geral significa uma escala em que todos ou quase todos os intervalos apresentam-se ligeiramente imprecisos, porém não distorcidos. Acabam por valorizar determinados intervalos em detrimento de outros, no sentido de que aos primeiros correspondem mesmas relações de frequência diferentemente dos restantes. O temperamento pitagórico se apresenta como o temperamento mais antigo utilizado no Ocidente. No Renascimento e no início do Barroco, prosperaram temperamentos desiguais em que se priorizavam as terças maiores naturais. Surgiam ainda outros temperamentos nesse período que se mostravam superados à medida que a música se estendiam as todas as tonalidades. No final da Idade Média e início do Renascimento, a música enveredou por caminhos que intimavam seu desprendimento de concepções melódicas rumo à conquista de um caráter principalmente harmônico. A trajetória trilhada pela música ocidental conduzia a música à liberdade de modulação não apenas para tonalidades próximas, mas para distintos cenários tonais, ou seja, as composições de então, intimavam a liberdade de transposição de tonalidades.

O Temperamento não ocorreu como um processo repentino, mas se desenvolveu de diversas maneiras. No início do século XVI, como as tentativas de preencher intervalos naturais de maneira relativamente simétrica sempre se defrontavam em algum momento com a coma fatal (termo utilizado para referir-se ao pequeno resto que sempre ocorrera quando se tenta ajustar intervalos puros em um número inteiro de oitavas), obtendo-se perfeição harmônica apenas em intervalos restritos, dominava-se algum tipo de temperamento parcial especialmente nos instrumentos de tecla. Os gamas de Pitágoras e Zarlino possibilitavam a construção de escalas

ligeiramente assimétricas incapazes, de responder inteiramente às necessidades culturais do final do Renascimento e início do Barroco, que intimaria do ponto de vista das dificuldades supra-referidas, o estabelecimento de um suporte libertador para a música denominada temperamento igual. Do ponto de vista matemático, o problema consistia em encontrar um fator f correspondente ao intervalo de semitom que após a multiplicar 12 vezes uma frequência f_0 correspondente a uma determinada nota, atingisse a sua oitava referente à frequência 2. Baseado na progressão geométrica – oitava = $2/1$; semitom = $2^{1/12}$ -, Euler pesquisou um sistema de afinação que permitiu aos compositores modularem para e de quaisquer dos 12 centros tonais (que correspondem às 12 notas da escala temperada – do, do# = reb, re, re# = mib, fa, fa# = solb, sol, sol# = lab, la, la# = sib, si) sem distorções geradas por intervalos correspondentes que apresentavam-se até então, assimétricos em diferentes escalas. Do ponto de vista matemático, o problema representava-se pela seguinte equação:

$$f_0.f.f.f.f.....f = f_0f^{12} = 2.f_0$$

Após algumas operações algébricas simples, não é difícil concluir que o valor de f deve assumir valor $2^{1/12}$.

Portanto, as notas desta escala possuem as seguintes relações de frequência com a nota inicial:

DÓ	RÉ	MI	FÁ	SOL	LÁ	SI	DÓ
1	21/16	21/3	25/12	27/12	23/4	211/12	2

Neste ponto, caberia ainda levantar a questão de porque escolher 12 notas entre os 300 sons diferentes dentro de uma oitava possível de discriminar pelo ouvido humano treinado. Provavelmente, a divisão procedeu-se dessa maneira por respeito a uma certa continuidade à

escala grega, cujo processo de construção – percurso de quintas – apresentava-se de tal maneira que o caminho aí delineado assumia, a menos de oitavas, máxima aproximação da nota inicial após 12 ciclos, referentes as 12 notas. Percebemos assim que se a relação de frequências é simples, então, o som do intervalo correspondente é bonito, o que sugere naturalmente a dúvida a respeito da recíproca, bem como muitas outras discussões.

5.1 - ESCALA TEMPERADA

Dentre as várias soluções apresentadas, a que vingou e é usada até os dias de hoje, foi a "escala de temperamento igual", de Andreas Werkmeister, proposta em 1691. Essa escala, hoje em dia chamada apenas de "escala temperada", possui também doze notas (sete "naturais" e cinco "acidentes"), mas em vez de preservar os intervalos "perfeitos" (frações de $2/3$, $3/4$, etc.), as notas foram levemente ajustadas, pois Werkmeister tomou o comprimento inteiro e dividiu-o exponencialmente em doze partes, baseado na raiz duodécima de dois. Isso fez com que a relação entre qualquer nota e sua vizinha anterior fosse sempre igual à raiz duodécima de dois (aproximadamente 1,0594), o que permitiu, então, a execução de qualquer música em qualquer tonalidade, uma vez que as relações entre intervalos iguais são sempre as mesmas, não importa qual a referência (tonalidade) que se use.

Apesar de a escala temperada não possuir mais os intervalos acusticamente perfeitos de $3/2$, $4/3$, etc., os novos intervalos correspondentes têm erros muito pequenos, praticamente imperceptíveis para o ouvido. A nova escala temperada contou com o apoio do famoso compositor Johann Sebastian Bach (séc. XVIII), que escreveu O Cravo Bem-Temperado, uma

obra contendo 24 prelúdios e fugas, que cobrem as 24 tonalidades maiores e menores, e provando que a proposta de Werkmeister não só era viável como não comprometia de forma alguma a qualidade e a beleza da Música. Portanto, toda a música ocidental que ouvimos atualmente utiliza uma escala de doze notas, criadas a partir de intervalos (frações) acusticamente perfeitos, mas posteriormente ajustadas matematicamente, de tal forma que permitiu ampliar o alcance da Música a horizontes que antes eram verdadeiramente impossíveis.

5.2 - EVOLUÇÃO HISTÓRICA DAS AFINAÇÕES E TEMPERAMENTOS

Os principais temperamentos históricos são:

Os sistemas de afinação natural - que procuram usar intervalos naturais ou justos, ou seja, intervalos que podem ser representados por números racionais (razões de números inteiros, com preferência pelos menores números inteiros possíveis). Usam-se razões de frequências baseados em proporções inteiras como as encontradas na série harmônica em vez de, por exemplo, dividir a oitava em partes exatamente iguais, e não representáveis por números racionais, como no caso do temperamento igual. Estes sistemas de afinação conseguem assegurar «a gama justa» para uma dada tonalidade (normalmente dó maior), mas, para notas estranhas a essa tonalidade, ocorre sempre algum desvio que é diferente para cada tipo de afinação. É o caso do sistema pitagórico, usado na Idade Média, em que se encurtava só uma das quintas, a «quinta do lobo». Usava-se o ciclo de quintas de Eb até G#, ficando com as oitavas afinadas e com todas as quintas perfeitamente afinadas exceto a última (G#-Eb), que ficava dissonante e cujo batimento «uivava» como um lobo porque ficava demasiado curta. Eram, sobretudo as quintas e quartas que eram apresentados na sua forma idealmente pura e simples porque eram os intervalos

considerados estáveis no contexto estilístico da época. As terceiras e sextas tinham algum batimento (menos do dobro das do temperamento igual), assim como os meios tons diatônicos, que eram pequenos, mas tomava-se partido do seu poder expressivo que criava uma cor harmônica nas cadências que eram usadas na época.

No século XV, começou a surgir o gosto por terceiras naturais e os músicos começaram a experimentar usar formas modificadas da afinação pitagórica para obter terceiras mais perto do seu valor natural. O grande teórico da Renascença, Gioseffo Zarlino (1517-1590), defendia um sistema de entonação justa baseada nas terceiras, e não nas quintas, como no sistema pitagórico, já que as terceiras passaram a ser usados como pontos de resolução e as terceiras pitagóricas já não assentavam bem no contexto musical. O sistema que preconizava era o que se chama hoje o sistema ptolomaico, um dos sistemas propostos por Ptolomeu, no século II D.C. Os temperamentos mesotónico - Pouco a pouco, as terceiras e sextas foram assumindo um papel mais relevante e, no início da Renascença, os músicos já desejavam encontrar novas afinações que tornassem um maior número delas naturais. Isso deu origem ao aparecimento dos temperamentos mesotónico (ou do tom médio) muito usados nos séculos XVI e XVIII. Enquanto os sistemas de afinação natural procuravam aproximar-se dos intervalos ideais, os sistemas de temperamento implicavam desvios deliberados, mas pequenos, desses valores. Procurando obter terças justas, encurtavam fortemente 11 quintas, resultando uma delas demasiado grande (Mib-Lá, também chamada a «quinta do lobo»). Este sistema não é mau para as tonalidades mais clássicas mas gera uma gama cromática muito desigual. Não se pode tocar nalgumas tonalidades. Mas já muitos teóricos da Renascença descreviam alternativas em que os intervalos não eram números racionais (razões de inteiros) e que correspondiam ao que se chama hoje o bom temperamento e o temperamento igual. Os temperamentos irregulares - No temperamento

mesotónico, para favorecer a «beleza», tentou-se ter tantas terceiras puras quanto possível, mesmo comprometendo as quintas e introduzindo alguns «lobos». No tempo de Bach, a partir do século XVIII, nos temperamentos irregulares, chamados também «sistemas bem temperados», favorecendo a «utilidade com variedade», optou-se por conseguir um contínuo de cores desde as terceiras puras às quintas puras, mas de modo a que todos os intervalos fossem utilizáveis e não tivessem «lobos». Estes temperamentos permitem tocar em todas as 24 tonalidades possíveis (12 maiores e 12 menores). Algumas quintas são mantidas perfeitas e outras são encurtadas. Podem-se usar todas as tonalidades, ficando, no entanto, cada uma com a sua «coloração diferente».

O temperamento igual - Favorecendo a «utilidade», decidiu-se temperar cada quinta pela mesma quantidade de modo a dispersar a coma pitagórica, deixando as terceiras ainda um tanto vibrantes mas já capazes de suportar tríades estáveis. É o temperamento adaptado atualmente no ocidente, em que a gama é dividida em 12 semitons exatamente iguais. As quintas, terças e quartas são «falsas», embora iguais entre si e desviando-se suficientemente pouco do ideal para serem suportáveis; o ouvido contemporâneo já se habituou a elas. Só as oitavas são perfeitas (embora, de fato, os afinadores de piano aumentem as oitavas nos graves e nos agudos, para terem em conta as características da percepção auditiva humana)

6 – CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo mostrar a historia das descobertas das relações e a importância da interdisciplinaridade da matemática-música.

Percebemos que foi há 2500 anos quando ocorreu a primeira manifestação de interação da música com a matemática. Posteriormente as relações entre essas áreas passam por momentos de tensão e repouso como uma ‘música’. Assim como as gamas apresentadas não conseguem produzir os sons referidos e talvez possamos construir novas gamas capazes de realizar tal exercício, as escalas construídas mostram-se incapazes de representar sentimentos ou cenários talvez passíveis de expressão em outros sistemas. Neste sentido, o universo musical reserva ainda muitas possibilidades em seu processo de expansão com a construção de outras escalas, bem como linguagens mais amplas, em que possivelmente distintas habilidades possam interagir com a música e a matemática vindo a contribuir não apenas com o exemplo apresentado de escalas temperadas com um número arbitrário de notas, mas através de diversos outros meios existentes ou que possam vir a existir.

O intuito desta pesquisa foi à comparação da leitura de determinados fatos a partir das concepções teóricas, permitindo desvendar naturezas e fluxos coletivos não somente sobre o assunto em questão, mas a dinâmica de desenvolvimento científico. Uma forma de arte nunca será objetiva e precisa a ponto de ser unanimidade, mas as simetrias e belezas observadas nas leis que governam a combinação das estruturas matemáticas usadas na descrição dos sons, em geral, e que permitem analisar o espectro sonoro de cada instrumento musical guardam estreita relação com a área da Música conhecida como Harmonia. Dessa maneira, a Matemática também são

capazes de mostrar e descrever, a partir de uma abordagem objetiva, as possibilidades das infinitas combinações de sons criadas por um gênio como Johann Sebastian Bach, por exemplo. A delicadeza das construções sonoras dos grandes mestres da Música pode ser vista, ao invés de ouvida, na análise dos sons de suas obras e no perfeito equilíbrio entre as formas de ondas instintivamente combinadas para formá-las. Ao ouvir algumas das "obras canônicas" dos compositores famosos, podemos considerá-los privilegiados por ser capazes de expressar e/ou criar emoções e "imagens sonoras" tão belas, algumas perpetuadas através de séculos, que puderam ser transmitidas a outros através da arte da Música. Ao mesmo tempo, ao estudar a História da Ciência, vemos que, não menos privilegiados são alguns dos físicos e matemáticos mais importantes da História. A eles coube o prazer de descobrir leis e fenômenos naturais, nos deixando ferramentas poderosas para o entendimento dessa mesma Natureza. É a perfeição dessas ferramentas e leis que nos permite olhar a Música sob outra óptica, um prisma diferente, unindo os mundos maravilhosos da Arte e da Ciência.

REFERÊNCIAS

ABDOUNUR, Oscar João. Matemática e Música: O pensamento analógico na construção de significados. São Paulo: Escrituras Editora, 1999.

BOYER, Carl, Historia da Matemática, São Paulo, 1974, Ed. Edgard Blucher.

ANDRADE, Mário de3. Pequena Historia da Musica. Livraria Martins Editora, 1953.

EVES, Howard, Introdução a historia da matemática, São Paulo, 1986, Ed. Edgard Blucher.

JULIANI, J. P, Matemática e Musica, (Trabalho de Graduação); São Carlos: UFSCAR, 2003.

LIMA, M. R. R. Exercícios de Teoria Musical: Uma Abordagem Prática. São Paulo; Embrafon, 2004.

ROEDERER, Juan G. Introdução a Física e Psicofísica da Música. São Paulo: Edusp, 1998.

WISNIK, J. M. O Som e o Sentido: Uma outra Historia da Música. São Paulo: Companhia das Letras: Círculo do Livro, 1989.

SÍTIOS DA INTERNET CONSULTADOS:

<http://euclides.if.usp.br/~fmt405/apostila/harmonia2/node2.html>

<http://homepages.kcbbs.gen.nz/rtomes/alex-ha.htm>

<http://imaginatorium.org/books/mathmus.htm>

<http://reglos.de/musinum/>

<http://www.angelfire.com/musicals/mwmusical/historia/china4.htm>

<http://www.cefetba.br/~fge/NFL/fge2/batimento.html>

http://www.chrysalis-foundation.org/Al-Jurjani's_Canon.htm

<http://www.cmu.eca.usp.br/lami/tutor/acustica/escalas/escalas.html>

<http://www.geocities.com/matematicacomprazer/logaritmomusica.html>

<http://www.qsl.net/py4zbz/teoria/espectro.htm>

<http://www.tvebrasil.com.br/salto/cronograma2003/ame/pgm5.htm>

